

Stabwerkmodelle im Stahlbetonbau

1 Einleitung

Die Methode der Stabwerkmodelle wurde entwickelt, um ein **allgemein gültiges Verfahren zur Modellierung von Stahlbetontragwerken** zur Verfügung zu haben, insbes. um unregelmäßige Bereiche einigermaßen realistisch modellieren zu können. Für regelmäßige Bauteile wie Balken oder Platten eignen sich die bekannten Theorien besser.

Ein 1. Modell für die Modellierung des Kraftflusses in einem Stahlbetonbalken mittels eines Fachwerks wurde schon 1899 durch Ritter vorgestellt. Dieser hat den Balken in Druckstreben (Beton) und Zugstreben (Stahl) unterteilt und entsprechend nachgewiesen. Dieses Vorgehen wird im Prinzip in abgewandelter Form noch heute benutzt (vgl. Querkraftbemessung).

In analoger Weise kann man **alle** Stahlbetontragwerke durch verallgemeinerte Fachwerke (**Stabwerkmodelle**) modellieren und bemessen. Hierzu werden im Prinzip die Spannungstrajektorien einzelner Spannungsfelder zu **Druck- und Zugstreben** zusammengefasst und dimensioniert. Hierbei ist es äußerst wichtig, die im Modell als Knoten idealisierten **Krafteinleitungen und Kraftumlenkungen** sinnvoll nachzuweisen.

Es ist offensichtlich, dass das Auffinden eines sinnvollen realistischen Kraftflusses bei unregelmäßigen Bauteilen nicht einfach ist. Ein guter Anhaltspunkt für den ersten Entwurf eines Stabwerkmodells kann ein Trajektorienbild der Hauptspannungen liefern, das z.B. durch eine FEM-Berechnung ermittelt werden kann.

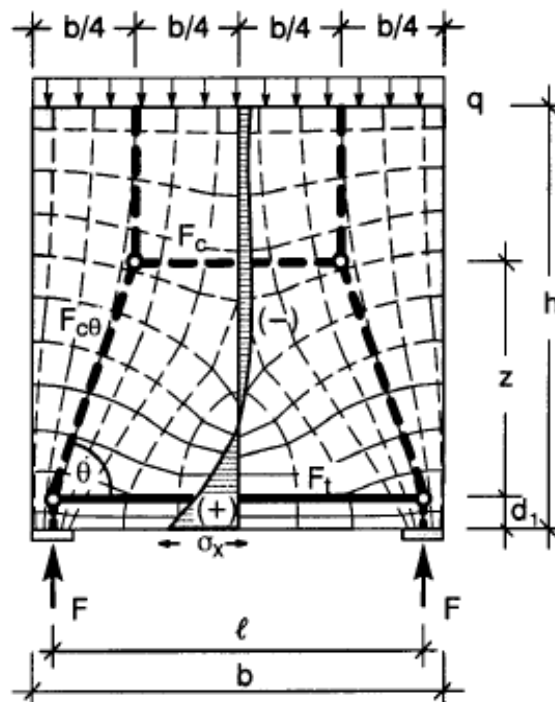


Bild: Hauptspannungen einer Scheibe mit Stabwerkmodell

Eine FEM-Berechnung kann nur ein erster Ansatz für die Modellierung sein, da die folgenden Einschränkungen existieren:

- Eine optimale Bewehrung müsste in Richtung der Hauptzugspannungen verlegt werden, was baupraktisch nicht möglich ist.
- Die Berechnung ist fast immer linear-elastisch (nicht-linear ist zu aufwändig), was für den Stahlbeton nur im Zustand I zutreffend ist.
- Wenn der Stahlbeton reißt (Zustand II), dann stellt sich im Tragwerk ein neuer Kräftezustand ein, der von dem im ungerissenen Zustand I erheblich abweicht: Die Zugkräfte verlaufen dann konzentriert in den Bewehrungsstäben, die aus baupraktischen Gründen meist senkrecht und parallel zu den Bauteilrändern verlegt werden.

Grundsätzlich ergibt sich folgendes Vorgehen für die Benutzung eines Stabwerkmodells:

- Zusammenfassen von Druckspannungen zu Druckstreben und Zugspannungen zu Zugstreben.
- Nachweis der Druckstreben (Beton).
- Bemessung der Zugstreben (Betonstahl).
- Nachweis der Knoten (Krafteinleitung und/oder Kraftumlenkung).

Vorteile von Stabwerkmodellen:

- Einfaches allgemein gültiges Berechnungsmodell.
- Gleiches Modell für Grenzzustände der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit (z.B. Rissbreitennachweis) möglich.
- Sehr anschaulich.
- Nichtlineare Berechnung ist möglich (z.B. Berücksichtigung von Tension stiffening).

Nachteile von Stabwerkmodellen:

- Ungenauere Ergebnisse bei regelmäßigen Tragwerken wie Balken oder Platten.
- Die Modellfindung ist manchmal schwierig (Kraftfluss im gerissenen Zustand II).
- Es können verschiedene Modelle für unterschiedliche Lastfälle erforderlich sein (keine Superposition möglich).

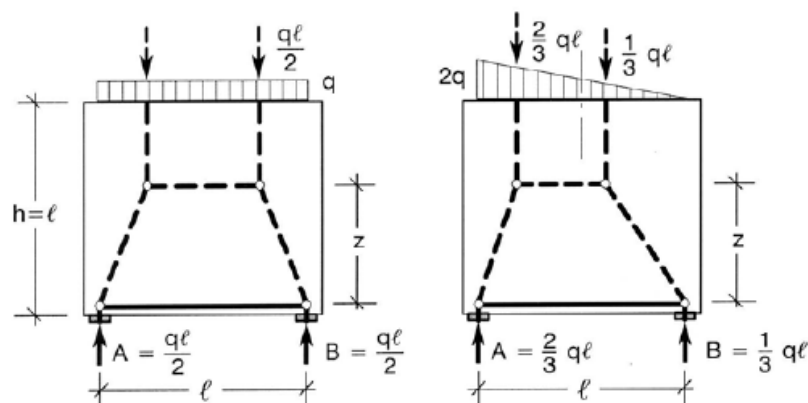
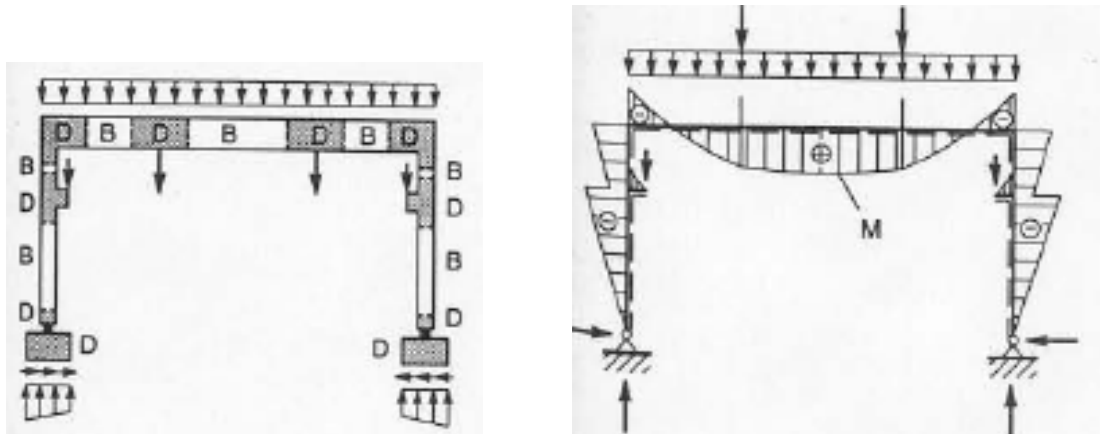


Bild: Verschiedene Modelle beim selben Tragwerk mit unterschiedlicher Belastung

2 D/B-Bereiche

Für ein sinnvolles und methodisches Vorgehen ist es zweckmäßig, ein Tragwerk in regelmäßige und unregelmäßige Bereiche zu unterteilen:

- **B-Bereich:** Regelmäßiger Bereich, in dem das Ebenbleiben der Querschnitte gilt (Bernoulli-Hypothese).
- **D-Bereich:** Unregelmäßiger Bereich (Diskontinuität), kein Ebenbleiben der Querschnitte.



Abgrenzung zwischen D- und B-Bereichen:

Die D-Bereiche sind so zu wählen, dass die Unverträglichkeiten resultierend aus nichtlinearen Spannungen an den Querschnittsprüngen oder Lasteinleitungen beseitigt werden. Hierzu kann angenommen werden, dass die nichtlinearen Spannungen in einer Entfernung gleich dem größten Abstand zwischen den Gleichgewichtskräften vernachlässigbar klein sind. Dieser Abstand entspricht bei Balken fast immer der Querschnittshöhe an der Diskontinuitätsstelle (siehe folgendes Bild 2.1)

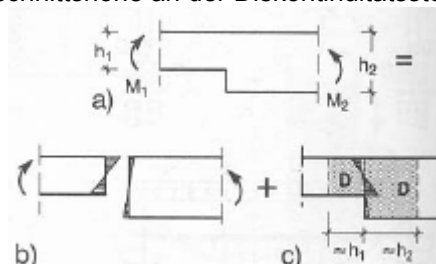


Bild 2.1: Abgrenzung des D-Bereichs am Beispiel eines Querschnittsprungs

2.1 B-Bereiche

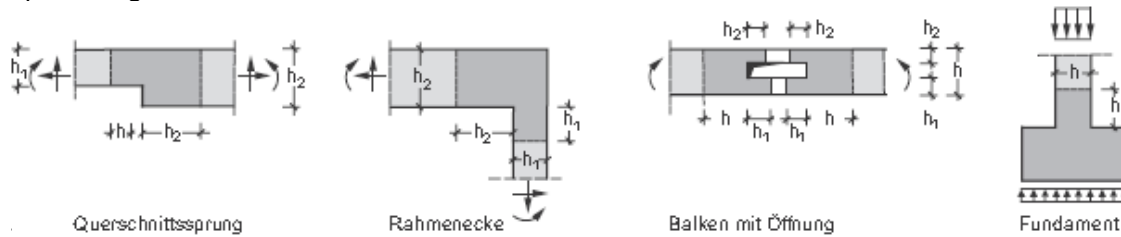
B-Bereiche stellen sich im Wesentlichen in Balken und Platten mit fast gleichbleibender Dicke und verteilter gleichmäßiger Belastung ein. Ihr innerer Spannungszustand lässt sich mit Standardverfahren auf der Basis von Schnittgrößen an jeder beliebigen Stelle berechnen.

Selbst für den gerissenen Zustand II von Stahlbeton gibt es nach EC 2 Standardverfahren für die Bemessung, so dass keine Stabwerksmodellierung erforderlich ist.

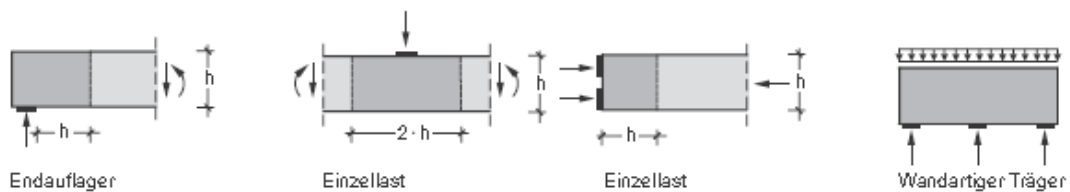
2.2 D-Bereiche

Bei D-Bereichen handelt es sich um Bereiche mit plötzlicher Änderung der Tragwerksform (**geometrische Diskontinuität**) und/oder um Bereiche mit konzentrierten Belastungen (**statische Diskontinuität**). Standardbemessungsverfahren sind auf solche Bereiche mit ausgeprägt nichtlinearen Dehnungsverteilungen im Normalfall nicht anwendbar.

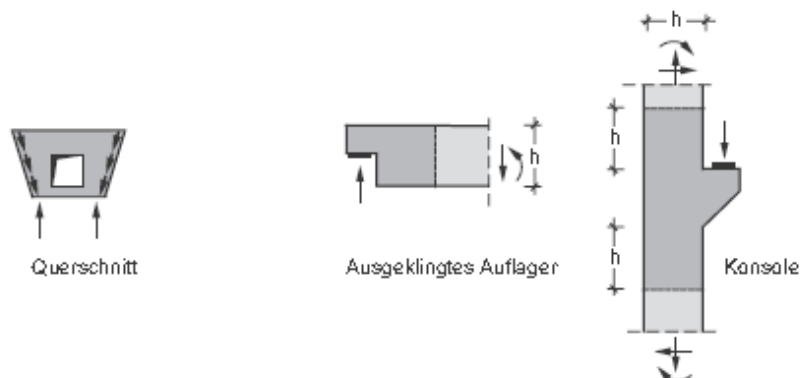
Beispiele für geometrische Diskontinuitäten:



Beispiele für statische Diskontinuitäten:



Beispiele für statische und geometrische Diskontinuitäten:



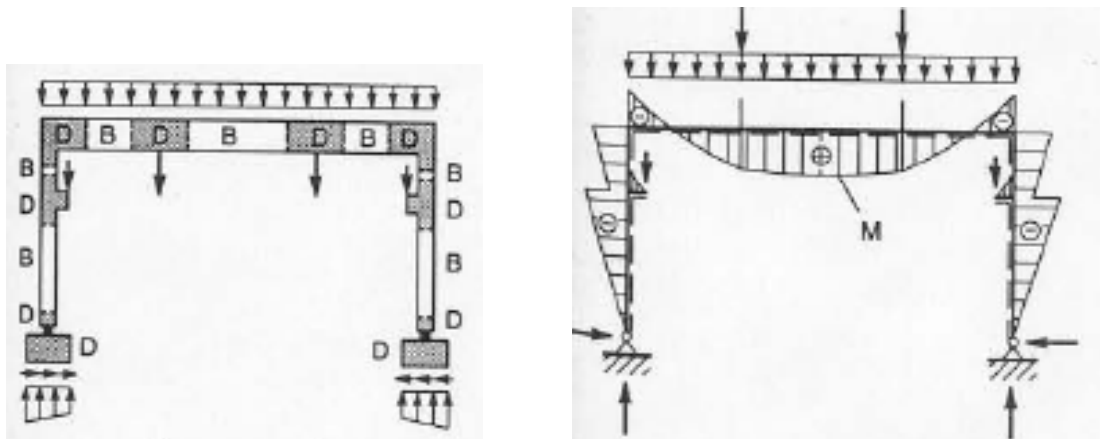
Solange die **D-Bereiche ungerissen** sind, kann die Ermittlung der **Spannungsverteilung linear elastisch** (FEM) erfolgen. Erfolgt aber infolge von **Rissbildung** eine Umlagerung der Zugkräfte auf die Bewehrung, dann bietet sich eine **Modellierung mit Hilfe eines Stabwerks** an, insbes. wenn es um Konstruktionsdetails wie z. B. Bewehrungsverankerungen geht.

3 Modellierung der D-Bereiche

3.1 Allgemeines Vorgehen

Während man bei den B-Bereichen mit wenigen Standardmodellen auskommt, muss bei den D-Bereichen stets ein eigenes Modell entwickelt oder ein bekanntes Modell an die eigenen Verhältnisse angepasst werden. Hierzu bietet sich die folgende Vorgehensweise an:

- Festlegen von Geometrie, Belastung und Auflagerbedingungen des Gesamttragwerks; Durchführen einer üblichen statischen Berechnung.
- Unterteilung des Tragwerks in D- und B-Bereiche.
- Bemessung der B-Bereiche mit den üblichen Standard-Bemessungsverfahren.
- Herauslösen der D-Bereiche aus dem Gesamttragwerk: Festlegen aller Randbedingungen und Belastungen des D-Bereichs. An den Rändern zum B-Bereich sind die Randspannungen bzw. Randkräfte aus der Berechnung des B-Bereichs zu entnehmen.
- Überprüfung des Gleichgewichts an jedem D-Bereich.
- Ermittlung des Kraftflusses im D-Bereich, Entwurf des zugehörigen Stabwerkmodells.



Grundsätze für den Modellentwurf:

- Zunächst möglichst einfache Modelle mit möglichst wenigen Stäben suchen.
- Zugstäbe an orthogonaler Bewehrungsführung orientieren.
- Lasten auf möglichst kurzem Weg abtragen, d.h. insbes. möglichst kurze Zugstäbe.

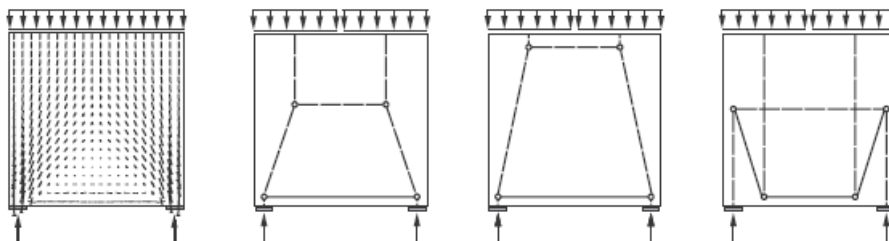


Bild 3.1.1: gutes und schlechtes Stabwerkmodell

3.2 Methode der Lastpfade

Das prinzipielle Vorgehen wird an dem folgenden einfachen Beispiel erläutert: Bei dem vorliegenden D-Bereich handelt es sich um eine Scheibe auf 2 Lagern, die am oberen Rand durch eine Trapezlast belastet ist, die aus dem angrenzenden B-Bereich resultiert.

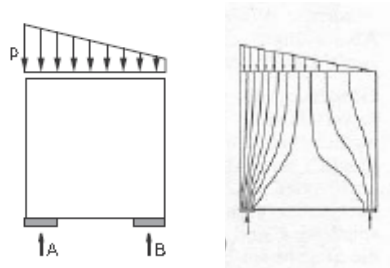


Bild 3.2.1: Scheibe als D-Bereich mit Druckspannungstrajektorienbild

Aus der statischen Berechnung des Gesamttragwerks ergeben sich die Auflagerreaktionen A und B und die trapezförmige Belastung am Rand des D-Bereichs.

Die Belastungsfläche wird nun so in 2 Teile aufgeteilt, dass die Resultierenden dieser Teile den Auflagerreaktionen A und B entsprechen.

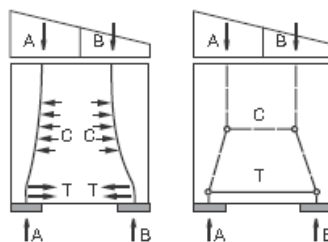


Bild 3.2.2: Lastpfade und Stabwerkmodell

Die Verbindungen zwischen den Resultierenden und den Auflagerreaktionen sind die Lastpfade. Es ist offensichtlich, dass die Lastpfade sich nicht kreuzen können, da sich ein möglichst kurzer stromlinienförmiger Verlauf einstellen muss. Die Lastpfade werden durch Polygone ersetzt.

Durch die Krümmung der Lastpfade entstehen Umlenkkräfte, die hier vereinfacht horizontal angenommen werden. Diese müssen miteinander im Gleichgewicht stehen, da keine horizontalen Kräfte an der Scheibe angreifen.

Für die Entwicklung der Stabwerkmodelle mit Hilfe der Lastpfade haben sich folgende Grundsätze bewährt:

- Die Winkel zwischen Zug- und Druckstreben sollten $> 45^\circ$ sein.
- Winkel $< 30^\circ$ sind unrealistisch.
- Da mehrere Modelle möglich sind, ist das mit den wenigsten und kürzesten Zugstreben am besten (kleinste Verformungen wegen der weichen Zugstreben).

3.3 Beispiele

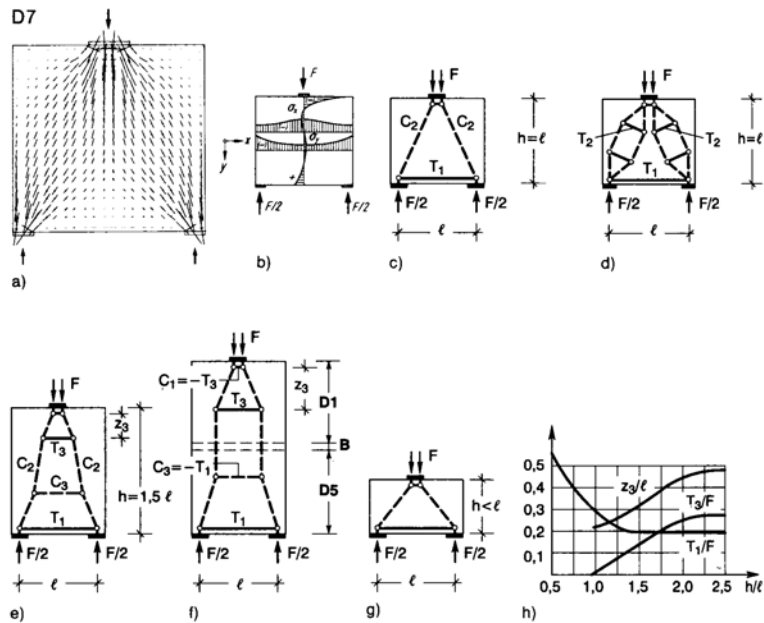


Bild: a) Hauptspannungen b) Spannungen Zustand I c)-g) Stabwerkmodelle
h) Stabkräfte und innerer Hebelarm z_3

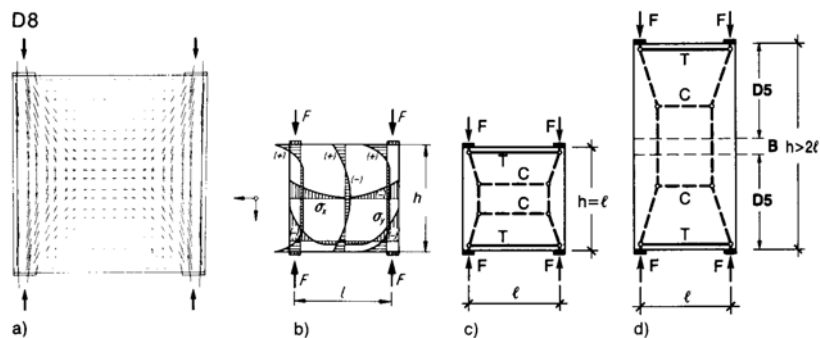


Bild: a) Hauptspannungen b) Spannungen Zustand I c)-d) Stabwerkmodelle

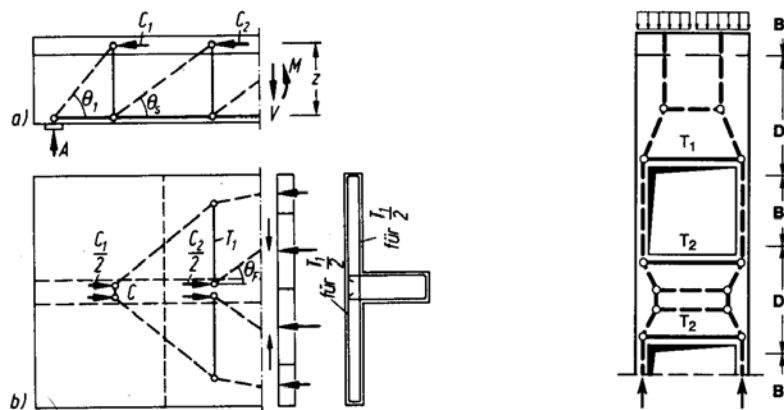


Bild: Plattenbalken
a) Modell für den Steg b) Modell für die Platte

Wandscheibe mit Aussparungen

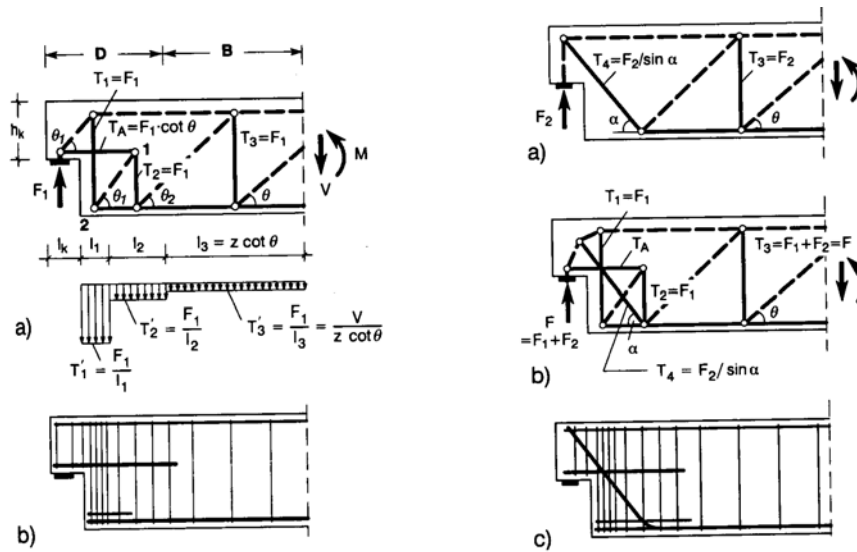


Bild: abgesetztes Auflager
 a) Modell senkrechte Bewehrung a) Modell schräge Bewehrung
 b) Bewehrung b) Kombination beider Modelle c) Bewehrung

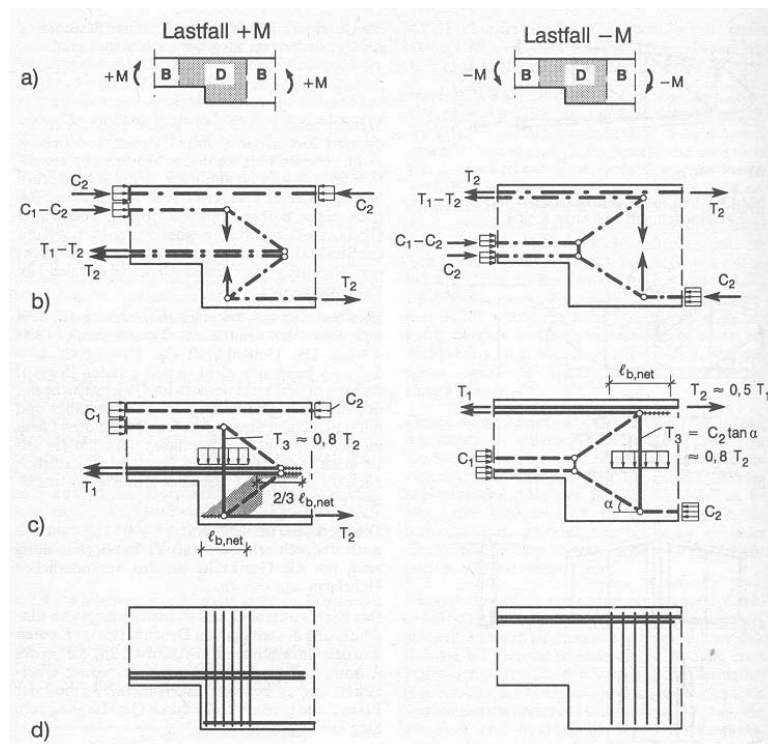


Bild: Balken mit Höhengsprung für positives und negatives Moment
 a) Übersicht b) Lastpfade c) Modell d) Bewehrung

4 Nachweis der Zug- und Druckstreben

4.1 Nachweis der Zugstreben

Der Bemessungswert der Stahlspannung für die Bewehrung beträgt f_{yd} .

Die Bewehrung ist auf jeden Fall bis in die **konzentrierten** Knoten ungeschwächt durch zu führen. Sie darf in **verschmierten** Knoten (siehe Bild 4.1.1), die sich im Tragwerk über eine größere Länge erstrecken, innerhalb des Knotenbereichs gestaffelt enden. Dabei muss sie alle durch die Bewehrung um zu lenkenden Druckwirkungen erfassen.

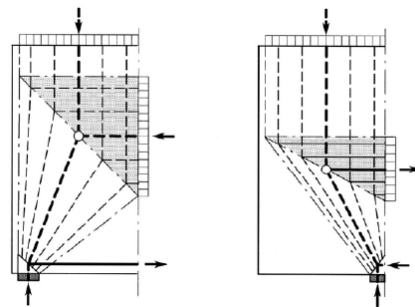


Bild 4.1.1: Verschmierte Knoten a) Druck-Knoten b) Zug-Druck-Knoten

Die **Verankerungslänge** der unter Zug stehenden Bewehrung beginnt am Knotenanfang, wo erste Druckspannungen aus den Druckstreben auf die Bewehrung treffen und von ihr umgelenkt werden (siehe folgendes Bild 4.1.2). Man beachte, dass durch einen genügend großen Überstand der Zugbewehrung die Zugstrebe dicker und der Knotenbereich damit größer wird.

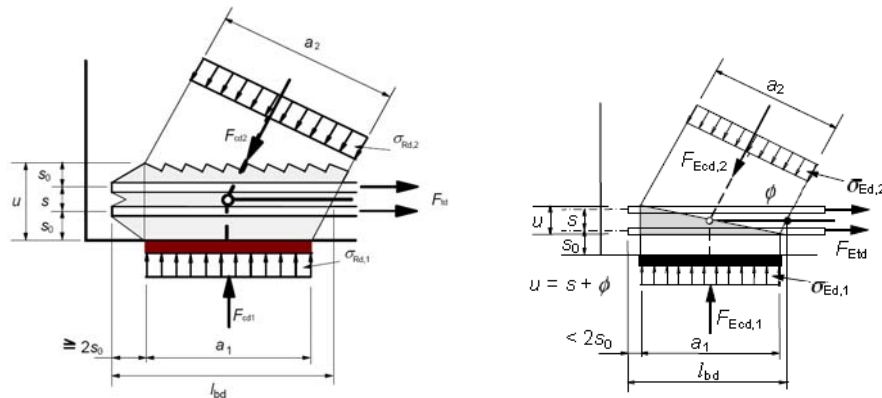


Bild 4.1.2: Druck-Zug-Knoten

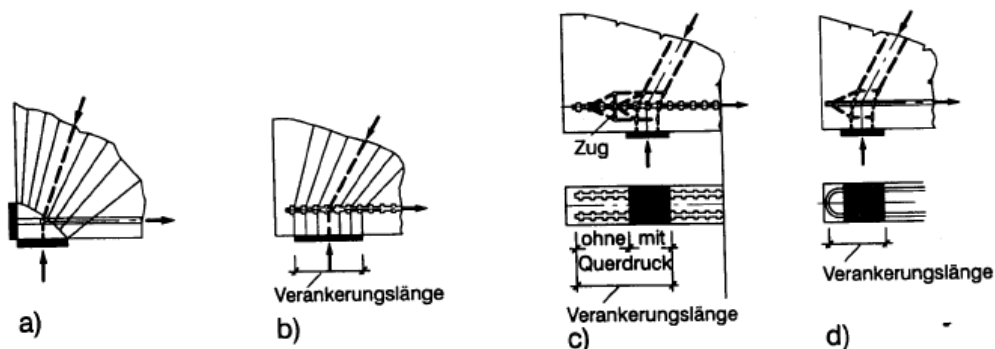


Bild 4.1.3: Möglichkeiten einer Bewehrungsverankerung:

- a) Verankerung durch Ankerplatte
- b) Verbund innerhalb eines Knotens
- c) Verbund innerhalb und hinter dem Knoten
- d) Radial wirkender Druck und Verbund

4.2 Nachweis der Druckstreben

Die Druckstreben des Stabwerkmodells sind für **Druck** und für **Querzug** (siehe Bild 4.2.1 unten), bei ebenen Stabwerkmodellen auch für Querzug senkrecht zur Ebene des Stabwerkmodells, zu bemessen. Die Querzugkraft T kann sowohl vom Beton als auch durch Stahleinlagen aufgenommen werden.

Die Querzugkraft im Druckfeld infolge einer Einschnürung an einem Knoten kann mit Hilfe eines örtlichen Stabwerkmodells ermittelt werden.

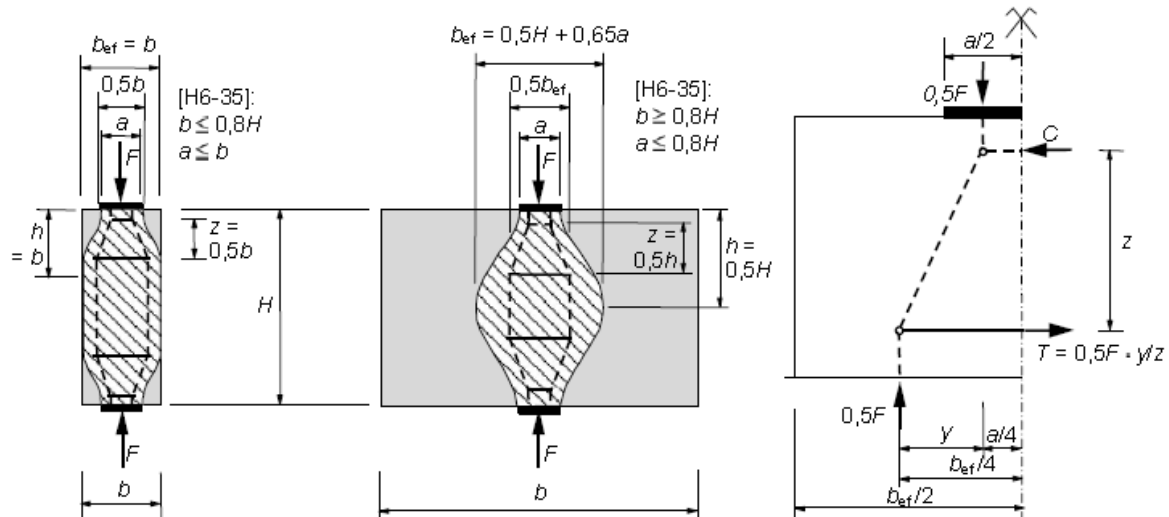


Bild 4.2.1: Querzugkräfte in einem Druckfeld mit Einschnürung zu konzentrierten Knoten an beiden Enden: links begrenzte Ausbreitung, Mitte unbegrenzte Ausbreitung, rechts Stabwerkmodell.

Die **Querzugkraft T** kann auf der sicheren Seite liegend wie folgt ermittelt werden:

Begrenzte Ausbreitungsmöglichkeit für $b \leq 0,5 \cdot H$ ($b \leq 0,8 \cdot H$ nach [1]):

$$T = \frac{1}{4} \cdot \frac{b-a}{b} \cdot F \quad (\text{EC2 6.58})$$

Unbegrenzte Ausbreitungsmöglichkeit für $b > 0,5 \cdot H$:

$$T = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - 0,7 \cdot \frac{a}{h}\right) \cdot F \quad (\text{EC2 6.59})$$

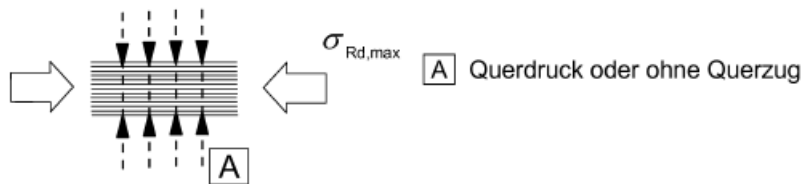
NA: Unbegrenzte Ausbreitungsmöglichkeit für $b > 0,5 \cdot H$:

Belastungsbreite $a > 0,25H$:
$$T = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - 0,7 \cdot \frac{a}{H}\right) \cdot F$$

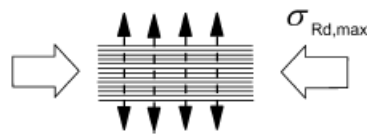
Belastungsbreite $a \leq 0,25H$:
$$T = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - 0,7 \cdot \frac{a}{H}\right)^2 \cdot F \quad (\text{vgl. Heft 600 DAfStb})$$

Der Bemessungswert der **Druckstrebenfestigkeit** ist wie folgt begrenzt:

A) für ungerissene Betondruckzonen (wie [1]) $\sigma_{Rd,max} = f_{cd}$



B) für gerissene Betondruckzonen $\sigma_{Rd,max} = 0,6 \cdot v' \cdot f_{cd}$ $v' = 1 - f_{ck}/250$



Festlegungen nach NA:

- $v' = 1,25$ für Druckstreben parallel zu Rissen (=Faktor 0,75, 0,80 nach [1])
- $v' = 1,00$ für Druckstreben mit kreuzenden Rissen (=Faktor 0,60, vgl. Heft 600 DAfStb und [1])
- $v' = 0,875$ für starke Rissbildung mit V und T (=Faktor 0,525, vgl. Heft 600 DAfStb und [1])



NA: Für Beton > C50/60 ist v' zusätzlich mit dem Faktor $v_2 = 1,1 - f_{ck}/500$ abzumindern.

In D-Bereichen muss eine Abschätzung über das mögliche Rissbild erfolgen. Dies ist allerdings in vielen Fällen schwierig und wird wohl nur in den Fällen möglich sein, bei denen entsprechende Versuchserfahrungen vorliegen. Im Regelfall wird man deshalb ungünstigerweise unterstellen, dass die Druckstreben Risse kreuzen können und einen geringeren Festigkeitswert ansetzen.

Für Bauteile mit sehr starker Rissbildung, wie z. B. in Zuggurten von Kastenträgern, sind noch niedrigere Werte möglich. Dies betrifft auch den Nachweis der Druckstrebenfestigkeit bei kombinierter Querkraft und Torsion. In DIN EN 1992-1-1/NA beträgt dieser Wert nach Gleichung (6.57cDE) $v' = 0,875$, d.h. $V_{Rd,max} = 0,6 v' f_{cd} = 0,525 f_{cd}$ für Druckstäbe, die breite Risse kreuzen können. Es wird empfohlen, bei der Bemessung mit Stabwerkmodellen in vergleichbar ungünstig und hoch beanspruchten Bauteilbereichen höchstens nur diesen Wert auszunutzen.

Für Druckstreben, deren Druckfelder sich zu konzentrierten Knoten hin stark einschnüren (siehe Bild 4.2.1), erübrigen sich Nachweise der Druckspannungen in Druckstrebenmitte, wenn die angrenzenden Knoten nach Abschnitt 4.3 nachgewiesen werden, da in diesem Fall die Nachweise am Knoten ungünstiger sind.

Das bedeutet praktisch, dass man im Normalfall (Druckstäbe können sich in der Mitte ausbreiten) nur die Knoten nach Abschnitt 4.3 nachweist.

4.3 Nachweis der Knoten

In konzentrierten Knoten (siehe Bild 4.3.1) sind die Bemessungsdruckspannungen ohne genaueren Nachweis wie folgt zu begrenzen (bei genauerem Nachweis können auch höhere Werte angesetzt werden):

- $\sigma_{Rd,max} = k_1 \cdot v' \cdot f_{cd}$ in Druckknoten ohne Verankerung von Zugstreben, z. B. nach Bild 4.3.1
 (= Faktor 1,10, nach [1] Faktor 1,0)
- $\sigma_{Rd,max} = k_2 \cdot v' \cdot f_{cd}$ in Druck-Zug-Knoten mit Verankerung von einer Zugstrebe (z. B. Bild 4.3.1)
 (= Faktor 0,75, nach [1] Faktor 0,8)
- $\sigma_{Rd,max} = k_3 \cdot v' \cdot f_{cd}$ in Druck-Zug-Knoten mit Verankerung von mehreren Zugstreben
 (= Faktor 0,75, nach [1] Faktor 0,6)

EC2: $k_1 = 1,00$ $k_2 = 0,85$ $k_3 = 0,75$ $v' = 1 - f_{ck}/250$

NA: $k_1 = 1,10$ $k_2 = 0,75$ $k_3 = 0,75$ $v' = 1,0$

Für Beton > C50/60 ist v' zusätzlich mit dem Faktor $v_2 = 1,1 - f_{ck}/500$ abzumindern

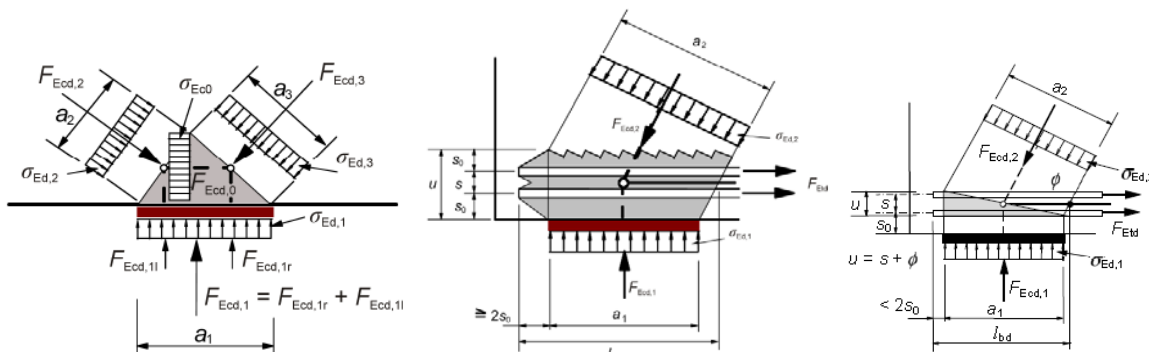


Bild 4.3.1: Knotenbereich für den Nachweis von Druckknoten und Druck-Zug-Knoten

Knoten mit Abbiegungen von Bewehrung (z. B. nach Bild 4.3.2) erfordern den Nachweis der zulässigen Biegerollendurchmesser nach EC 2.

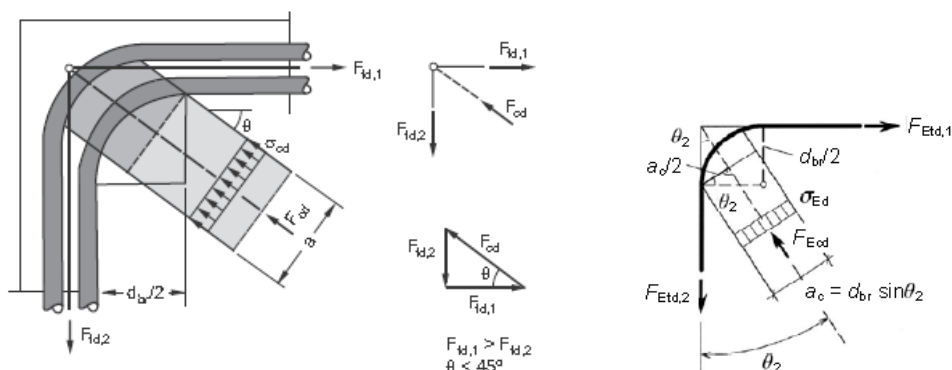
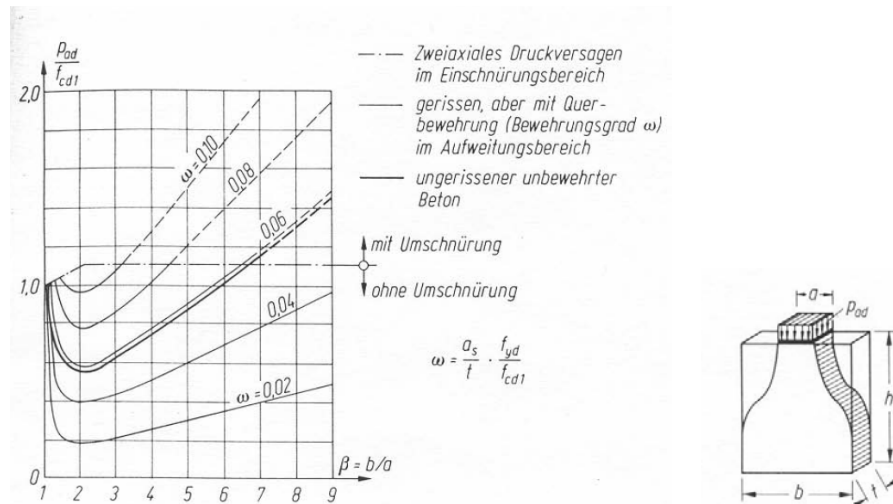


Bild 4.3.2: Druck-Zug-Knoten mit Umlenkung von Bewehrung (Zugstreben in versch. Richtungen)

Die Bemessungswerte für die Druckspannung dürfen um bis zu 10 % erhöht werden, wenn mindestens eine der unten aufgeführten Bedingungen zutrifft:

- dreiaxialer Druck ist gewährleistet;
- alle Winkel zwischen Druck- und Zugstreben sind $\geq 55^\circ$;
- die an Auflagern oder durch Einzellasten aufgebrachtten Spannungen sind gleichmäßig verteilt und der Knoten ist durch Bügel gesichert;
- die Bewehrung ist in mehreren Lagen angeordnet;
- die Querdehnung des Knotens wird zuverlässig durch die Lager oder Reibung behindert.

Nach [1] liefert das folgende Diagramm, sofern keine wesentlichen Zwangsspannungen auftreten, den unteren Grenzwert der zulässigen Knotenspannung für die **Ausführung von Druckstreben ohne Querkugbewehrung** für alle Arten von Druckspannungsfeldern (durchgezogene dicke Linie). Dieser untere Grenzwert ist im Prinzip die Risslast, ermittelt durch eine linear elastische Rechnung.



$$p_{ad} = f_{cd} \times \text{Diagrammwert}$$

Bild 4.2.2: Zulässige Knotenspannung für Druckstreben ohne Querkugbewehrung nach [1].

Man erkennt eindeutig, dass bei einem Geometrieverhältnis von $b/a = 2$ bereits eine Druckspannung von ca. $0,60 \times f_{cd}$ einen Spaltriss verursachen kann. Die Versagenslast der Druckstrebe liegt jedoch meist höher als ihre Risslast.

5 Literatur

- [1] Schlaich/Schäfer: Konstruieren im Stahlbetonbau, Betonkalender 1998, Teil 2, Ernst & Sohn
- [2] DIN EN 1992-1-1 Eurocode 2, Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, Beuth Verlag GmbH, 10772 Berlin, Januar 2011
- [3] DIN EN 1992-1-1/NA Eurocode 2, Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, Beuth Verlag GmbH, 10772 Berlin, Juli 2012
- [4] Eurocode 2 für Deutschland, Kommentierte Fassung, Ernst&Sohn, Berlin.
- [5] Schneider Bautabellen für Ingenieure, neueste Auflage.
- [6] Heft 600 DAfStb, Beuth-Verlag, Berlin, August 2012